C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 357 (2019) 571–575

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse numérique

Sur la distance à l'instabilité de polynômes matriciels quadratiques

On the distance to instability of quadratic matrix polynomials

Alexander Malyshev [a], Miloud Sadkane [b]

[a] *University of Bergen, Department of Mathematics, Postbox 7803, 5020 Bergen, Norway*
[b] *Université de Brest, CNRS – UMR 6205, Mathématiques, 6, avenue Victor-Le-Gorgeu, 29238 Brest cedex 3, France*

I N F O   A R T I C L E

Historique de l'article :
Reçu le 12 octobre 2018
Accepté après révision le 14 juin 2019
Disponible sur Internet le 27 juin 2019

Présenté par le Comité de rédaction

R É S U M É

Nous développons une méthode de type bissection pour calculer la distance à l'instabilité de polynômes matriciels quadratiques. Le calcul prend en compte les erreurs d'arrondi.

A B S T R A C T

A bisection method is developed for computing the distance to instability of quadratic matrix polynomials. The computation takes rounding errors into account.

Abridged English version

For a given regular quadratic matrix polynomial $Q(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$, we are interested in computing a distance from $Q(\lambda)$ to the set $\mathcal{U}$ of quadratic matrix polynomials that have at least one purely imaginary eigenvalue or an infinite one. Such a distance measures the smallest (with respect to some norm) quadratic perturbation $\delta Q(\lambda) = \delta A_0 + \lambda\delta A_1 + \lambda^2\delta A_2$ that causes the perturbed matrix polynomial $Q + \delta Q$ to have an eigenvalue on the imaginary axis $\mathrm{i}\bar{\mathbb{R}}$ extended by the point at infinity. In other words, if $|||\delta Q|||$ measures the size of the quadratic perturbation, then the desired distance can be expressed as

$$d = \min\{|||\delta Q||| : Q + \delta Q \in \mathcal{U}\}. \tag{1}$$

When $Q(\lambda)$ is stable in the continuous-time sense that all its finite eigenvalues, defined as the roots of the scalar polynomial equation $\det(Q(\lambda)) = 0$, belong to the open left half-plane, the distance (1) is often referred to as the complex stability radius; see, e.g., [1]. The special choice $|||\delta Q||| = \|[\delta A_0, \delta A_1, \delta A_2]\|_2$, where $\|\ \|_2$ is the spectral matrix norm, leads to the formula

Adresses e-mail : alexander.malyshev@math.uib.no (A. Malyshev), miloud.sadkane@univ-brest.fr (M. Sadkane).

https://doi.org/10.1016/j.crma.2019.06.007

$$d = \min_{\omega \in \bar{\mathbb{R}}} \frac{\sigma_{\min}(Q(i\omega))}{\sqrt{1+\omega^2+\omega^4}}, \tag{2}$$

where $\sigma_{\min}$ denotes the smallest singular value of a matrix.

Formula (2) expresses the distance as the global minimum of a relatively complicated function, which may have many local minima. We are unaware of any general optimization algorithm that accomplishes this task in a reliable way. Nevertheless, this formula is a starting point to an efficient bisection method.

Let s equal $\sigma_{\min}(Q(i\omega))/\sqrt{1+\omega^2+\omega^4}$ for some $\omega \in \bar{\mathbb{R}}$, and consider the matrix polynomial $P(\lambda) = B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2$, where

$$B_0 = \begin{bmatrix} -sI & A_0^* \\ A_0 & -sI \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -isI & -A_1^* \\ A_1 & isI \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} sI & A_2^* \\ A_2 & sI \end{bmatrix}, \tag{3}$$

(note that B_0 and B_2 are Hermitian, whereas B_1 is skew-Hermitian). A necessary and sufficient condition for $P(\lambda)$ to have an eigenvalue on the set $i\bar{\mathbb{R}}$ is given by the inequality $s \ge d$.

This condition motivates the development of an iterative bisection method that computes a lower bound α and an upper bound β on d. The bounds are initialized (for example, at 0 and $\min(\sigma_{\min}(A_0), \sigma_{\min}(A_2))$ respectively) and then refined as the iterations proceed. At each iteration, a new value of $s \in [\alpha, \beta]$ is chosen, the matrices B_0, B_1 and B_2 are updated, followed by deciding whether the corresponding matrix polynomial $P(\lambda)$ has an eigenvalue on $i\bar{\mathbb{R}}$ and by determination of new values for α and β.

The decision about the location of some eigenvalues of $P(\lambda)$ on $i\bar{\mathbb{R}}$ is crucial for success of the bisection method. The method will be more robust to rounding errors if it is based on backward stable and structure-preserving algorithms such as those in [4,5]. In this case, we show how and why the necessary and sufficient condition mentioned above holds, despite rounding errors in floating-point computations.

1. Introduction

Soit $Q(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ un polynôme matriciel quadratique, que l'on suppose régulier ($\text{dét}(Q(\lambda)) \not\equiv 0$). On s'intéresse au calcul d'une distance entre $Q(\lambda)$ et l'ensemble $\mathcal{U}$ des polynômes matriciels quadratiques ayant une valeur propre imaginaire pure ou une valeur propre infinie. Une telle distance mesure la plus petite (dans un sens qui sera précisé) perturbation quadratique $\delta Q(\lambda) = \delta A_0 + \lambda \delta A_1 + \lambda^2 \delta A_2$ telle que $Q + \delta Q$ ait une valeur propre sur l'axe imaginaire $i\bar{\mathbb{R}}$ étendu à l'infini. Autrement dit, si $|||\delta Q|||$ mesure la taille de la perturbation δQ, cette distance s'exprime sous la forme

$$d = \min\{|||\delta Q||| : Q + \delta Q \in \mathcal{U}\}. \tag{4}$$

Lorsque $Q(\lambda)$ est stable au sens où ses valeurs propres finies, définies comme étant les racines du polynôme scalaire $\text{dét}(Q(\lambda)) = 0$, sont à partie réelle négative, la distance d est souvent désignée sous le nom de rayon de stabilité complexe [1]. Le choix particulier $|||\delta Q||| = \|[\delta A_0, \delta A_1, \delta A_2]\|_2$, où $\|\ \|_2$ désigne la norme matricielle spectrale, conduit à la formule

$$d = \min_{\omega \in \bar{\mathbb{R}}} \frac{\sigma_{\min}(Q(i\omega))}{\sqrt{1+\omega^2+\omega^4}}, \tag{5}$$

où $\sigma_{\min}$ désigne la plus petite valeur singulière.

Malheureusement, la portée pratique de cette formule est limitée par la difficulté d'approcher efficacement le minimum global. Elle sera néanmoins utile pour approcher la distance d à l'aide d'une méthode itérative de type bissection. A chaque itération de cette méthode, on doit décider si un polynôme matriciel, de structure particulière, possède une valeur propre imaginaire pure. Le but de cette note est de montrer que l'approximation de d est d'autant meilleure que la décision prise sur les valeurs propres est basée sur des algorithmes inversement stables et tenant compte de la structure.

2. Calcul de la distance à l'instabilité

Pour tout s tel que $d \le s \le \beta_0 = \min(\sigma_{\min}(A_0), \sigma_{\min}(A_2))$, la formule (5) garantit l'existence de $\omega \in \bar{\mathbb{R}}$ et un triplet (s, u, v) constitué de la valeur singulière s et de vecteurs singuliers droit et gauche, u et v, de $Q(i\omega)/\sqrt{1+\omega^2+\omega^4}$. Notons que le cas $\omega = \pm\infty$ correspond à la situation où la matrice A_2 est singulière et peut, par conséquent, être traité séparément. Pour $\omega \in \mathbb{R}$, on a donc

$$\begin{aligned} &\left(A_0 + i\omega A_1 - \omega^2 A_2\right) u - s\sqrt{1+\omega^2+\omega^4}\, v = 0, \\ &\left(A_0 + i\omega A_1 - \omega^2 A_2\right)^* v - s\sqrt{1+\omega^2+\omega^4}\, u = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

En posant $(1+\omega+\omega^2)\tilde{v} = \sqrt{1+\omega^2+\omega^4}\, v$, on obtient

$$\begin{aligned} &\left(A_0 + i\omega A_1 - \omega^2 A_2\right) u - s\left(1+\omega+\omega^2\right) \tilde{v} = 0, \\ &\left(A_0 + i\omega A_1 - \omega^2 A_2\right)^* \tilde{v} - s\left(1-\omega+\omega^2\right) u = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

qui s'écrit sous la forme d'un problème de valeurs propres $P(\mathrm{i}\omega)\begin{bmatrix} u \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = 0$, où

$$P(\lambda) = B_0 + \lambda B_1 + \lambda^2 B_2 \tag{8}$$

est le polynôme matriciel quadratique défini par

$$B_0 = \begin{bmatrix} -sI & A_0^* \\ A_0 & -sI \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -\mathrm{i}sI & -A_1^* \\ A_1 & \mathrm{i}sI \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} sI & A_2^* \\ A_2 & sI \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Notons au passage que B_0 et B_2 sont hermitiennes, tandis que B_1 est anti-hermitienne. Inversement, si le polynôme $P(\lambda)$ a une valeur propre imaginaire pure, il est clair que $s \geq d$. On a donc le résultat suivant.

Théorème 2.1. *Soit $\beta_0 = \min(\sigma_{\min}(A_0), \sigma_{\min}(A_2))$ et $0 \leq s \leq \beta_0$. Une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $P(\lambda)$ défini par (8) et (9) admette une valeur propre imaginaire pure est que $s \geq d$.*

Ce résultat est à l'origine du développement d'une méthode de bissection permettant de calculer une borne inférieure α et une borne supérieure β de d. En voici une description algorithmique succincte.

initialiser les bornes α et β,
choisir un seuil de précision τ,
tant que $\beta - \alpha > \tau$, suivre les étapes (i) et (ii)
(i) mettre à jour les matrices B_0, B_1 et B_2 avec une nouvelle valeur de $s \in [\alpha, \beta]$,
(ii) si $P(\lambda)$ a une valeur propre imaginaire pure, alors $\beta = s$, sinon, $\alpha = s$

Les bornes sont initialisées, par exemple, à $\alpha = 0$ et $\beta = \beta_0 = \min(\sigma_{\min}(A_0), \sigma_{\min}(A_2))$, puis affinées au cours des itérations. À chaque itération, on calcule une nouvelle valeur $s \in [\alpha, \beta]$ (par exemple, $s = \sqrt{\alpha\beta}$), suivie d'une mise à jour des matrices B_0, B_1, B_2 et donc du polynôme $P(\lambda)$, de la décision sur l'existence d'une valeur propre imaginaire pure et les nouvelles bornes α et β qui découlent du théorème 2.1.
En pratique, la décision sur l'existence d'une valeur propre imaginaire pure de $P(\lambda)$ doit être prise avec beaucoup de précautions. À l'issue de ces opérations, les bornes α et β vérifient les conditions

$$0 \leq \alpha \leq d \leq \beta \ \text{ et } \ \beta - \alpha \leq \tau.$$

Nous expliquons maintenant la démarche qui garantit que la condition nécessaire et suffisante évoquée au théorème 2.1 reste valable malgré les erreurs d'arrondi ; ce sera l'objet du théorème 2.2.

Remarquons que

$$\begin{bmatrix} P(\lambda) & \\ & P(\lambda) \end{bmatrix} = (\lambda\widehat{\mathcal{B}} - \widehat{\mathcal{A}})(\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A}), \tag{10}$$

où

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} I & \\ & B_2 \end{bmatrix}, \ \mathcal{A} = \begin{bmatrix} & I \\ -B_0 & -B_1 \end{bmatrix}, \ \widehat{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} B_2 & \\ & I \end{bmatrix}, \ \widehat{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -B_1 & -I \\ B_0 & \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de $P(\lambda)$ peuvent, par exemple, être calculées par application de la méthode QZ [6] au faisceau linéaire $\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A}$ (ou $\lambda\widehat{\mathcal{B}} - \widehat{\mathcal{A}}$). Cette méthode présente le grand avantage d'être inversement stable. Mentionnons que l'algorithme développé dans [3] possède de meilleures propriétés de stabilité grâce notamment à une mise à l'échelle, suivie d'une linéarisation appropriée et d'une étape de déflation. L'inconvénient est la non-prise en compte de la structure (c'est-à-dire la symétrie évoquée plus haut) des matrices B_0, B_1, B_2. Pour remédier à cela, supposons que les valeurs propres de $P(\lambda)$ ne soient pas imaginaires pures et considérons la transformation de Cayley $\lambda = (\mu - 1)/(\mu + 1)$ qui transforme, de manière bijective, le cercle unité $\{\mu = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\}$ en l'axe imaginaire $\{\lambda = \mathrm{i}\omega\}$, $\omega = \tan\frac{\phi}{2}$, et donc le polynôme $P(\lambda)$ en le polynôme

$$\mathcal{P}(\mu) = (\mu + 1)^2 P\left((\mu - 1)/(\mu + 1)\right) = C_0 + \mu C_1 + \mu^2 C_2, \tag{11}$$

où

$$C_0 = B_0 - B_1 + B_2, \quad C_1 = 2(B_0 - B_2), \quad C_2 = C_0^*. \tag{12}$$

Le polynôme $\mathcal{P}(\mu)$ est palindromique (car $C_0 = C_2^*$ et $C_1 = C_1^*$). Ses valeurs propres sont donc placées symétriquement par rapport au cercle unité. De plus, on a (l'analogue de (10)) :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(\mu) & \\ & \mathcal{P}(-\mu) \end{bmatrix} = R^{-1}(L^* + \mu^2 L)R, \tag{13}$$

où

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & I \\ \mu I & -\mu I \end{bmatrix} \text{ et } L = \begin{bmatrix} C_2 & \\ C_1 & C_2 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, les valeurs propres de $P(\lambda)$ où $\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$ s'obtiennent à partir de celles de $\mathcal{P}(\mu)$ où $|\mu| \neq 1$, par application de méthodes adaptées au faisceau linéaire palindromique $L^* + \mu^2 L$ [4].

Le résultat principal est le suivant.

Théorème 2.2. *(1) On suppose que les valeurs propres de $P(\lambda)$ sont calculées à partir de celles de $\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A}$ par une méthode inversement stable. Si l'une des valeurs propres, λ, est proche de l'axe imaginaire, alors $s \geq d - \delta$, où δ depend des erreurs d'arrondi, de la taille des matrices A_j et de l'écart entre λ et l'axe imaginaire.*
(2) On suppose que les valeurs propres de $P(\lambda)$ sont calculées à partir de celles de $L^* + \mu^2 L$ par une méthode inversement stable et adaptée à la structure palindromique. Si aucune des valeurs propres n'est située sur l'axe imaginaire, et si $s < \beta_0$, alors $s < d + \eta$, où η depend des erreurs d'arrondi et de la taille des matrices A_j.

Démonstration. Quitte à diviser $P(\lambda)$ par $\max(\|B_0\|_2, \|B_1\|_2, \|B_2\|_2)$, on peut supposer que $\|A_j\|_2 \leq 1$, $0 \leq j \leq 2$. Cela entraîne $\|\mathcal{B}\|_2 \leq 1$, $\|\mathcal{A}\|_2 \leq 2$, $\|\widehat{\mathcal{B}}\|_2 \leq 1$, $\|\widehat{\mathcal{A}}\|_2 \leq 2$.

(1) La méthode inversement stable qui permet le calcul des valeurs propres de $\lambda\mathcal{B} - \mathcal{A}$ est, comme nous l'avons déjà mentionné, la méthode QZ. En théorie, elle détermine des matrices triangulaires supérieures $T_{\mathrm{B}} = Q\mathcal{B}Z$ et $T_{\mathrm{A}} = Q\mathcal{A}Z$, où Q et Z sont unitaires, mais en pratique, elle calcule

$$T_{\mathrm{B}} = Q(\mathcal{B} + \Delta_1)Z, \quad T_{\mathrm{A}} = Q(\mathcal{A} + \Delta_0)Z, \tag{14}$$

avec $\|\Delta_i\|_2 \leq c_i \epsilon_{\mathrm{mach}}$, $i = 0, 1$, où ϵ_{mach} désigne la précision machine, et c_i est une constante qui dépend de la taille des matrices $\mathcal{B}$ et $\mathcal{A}$ et donc de la taille des matrices A_j. Par la suite, on écrira $\|\Delta_i\|_2 = \mathcal{O}(\epsilon_{\mathrm{mach}})$, $i = 0, 1$.

Afin de détecter la présence de valeurs propres imaginaires pures, nous considérons les ratios des éléments diagonaux de T_{A} et T_{B} : $(T_{\mathrm{A}})_{kk}/(T_{\mathrm{B}})_{kk} = \gamma_k + \mathrm{i}\omega_k$, et déclarons que $\gamma_k + \mathrm{i}\omega_k$ est une valeur propre imaginaire pure si $|\gamma_k| < \mathrm{tol}$, où tol est le seuil de tolérance pour la détection de valeurs propres imaginaires pures. Il en résulte que l'élément diagonal $(T_{\mathrm{A}})_{kk}$ est remplacé par $(T_{\mathrm{A}})_{kk} - \gamma_k (T_{\mathrm{B}})_{kk}$ et que cela augmente la norme $\|\Delta_0\|_2$ d'une valeur au plus égale à $\mathrm{tol}(1 + \|\Delta_1\|_2)$. Ainsi, la détection d'une valeur propre imaginaire pure se traduit par l'existence d'un réel ω tel que

$$\mathrm{dét}(\mathrm{i}\omega(\mathcal{B} + \Delta_1) - (\mathcal{A} + \Delta_0)) = 0, \tag{15}$$

où $\|\Delta_1\|_2 = \mathcal{O}(\epsilon_{\mathrm{mach}})$ et $\|\Delta_0\|_2 = \mathcal{O}(\epsilon_{\mathrm{mach}}) + \mathrm{tol}\,(1 + \mathcal{O}(\epsilon_{\mathrm{mach}}))$.
Multipliant (15) par $\mathrm{dét}(\mathrm{i}\omega\widehat{\mathcal{B}} - \widehat{\mathcal{A}})$ et utilisant (10), on obtient $\mathrm{dét}\,(\mathcal{Q} + \mathcal{E} - sI) = 0$, avec

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{Q}} & \\ & \widehat{\mathcal{Q}} \end{bmatrix}, \; \widehat{\mathcal{Q}} = \begin{bmatrix} & \frac{(Q(\mathrm{i}\omega))^*}{\sqrt{1+\omega^2+\omega^4}} \\ \frac{Q(\mathrm{i}\omega)}{\sqrt{1+\omega^2+\omega^4}} & \end{bmatrix}, \; \mathcal{E} = \widehat{D}(\mathrm{i}\omega\widehat{\mathcal{B}} - \widehat{\mathcal{A}})(\mathrm{i}\omega\Delta_1 - \Delta_0)\widehat{D}, \tag{16a}$$

$$\widehat{D} = \begin{bmatrix} D & \\ & D \end{bmatrix}^{-1/2}, \quad D = \begin{bmatrix} (1 - \omega + \omega^2)I & \\ & (1 + \omega + \omega^2)I \end{bmatrix} \tag{16b}$$

(toutes les matrices dépendent de ω, cette dépendance n'est pas rappelée).

Le théorème de Bauer–Fike [2] appliquée à $\mathcal{Q} + \mathcal{E} - sI$ montre que $s \geq d - \|\mathcal{E}\|_2$, et on vérifie que

$$\|\mathcal{E}\|_2 \leq \delta, \quad \delta = 6\left[\mathcal{O}(\epsilon_{\mathrm{mach}}) + (1 + \mathcal{O}(\epsilon_{\mathrm{mach}}))\frac{\mathrm{tol}}{1 + |\omega|}\right].$$

(2) L'utilisation d'un algorithme inversement stable et préservant la structure palindromique garantit l'existence d'une matrice de perturbation Δ telle que $\|\Delta\|_2 = \mathcal{O}(\epsilon_{\mathrm{mach}})$ et

$$\mathrm{dét}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}(L + \Delta)^* + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}(L + \Delta)\right) \neq 0, \text{ pour tout } \phi \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

La formule (13) appliquée à la matrice unitaire $R = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & I \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} I & -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} I \end{bmatrix}$ donne

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}L^* + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}L = R\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\mathcal{P}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}) & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\mathcal{P}(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}) \end{bmatrix}R^*. \tag{18}$$

La condition (17) devient, en utilisant (18) et (12) :

$$\mathrm{dét}(\mathcal{L} + \mathcal{D}) \neq 0, \text{ pour tout } \omega \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

avec

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{Q}} - sI & \\ & \check{\mathcal{Q}} - sI \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \frac{4}{1+\omega^2} D & 0 \\ & \frac{4}{1+\omega^{-2}} D \end{pmatrix}^{-1/2} R^* \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} \Delta^* + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \Delta \right] R \begin{pmatrix} \frac{4}{1+\omega^2} D & 0 \\ & \frac{4}{1+\omega^{-2}} D \end{pmatrix}^{-1/2},$$

les matrices $\widehat{\mathcal{Q}}$ et D sont définies dans (16) et la matrice $\check{\mathcal{Q}}$ est définie de manière analogue à $\widehat{\mathcal{Q}}$ en remplaçant ω par ω^{-1}. Il s'ensuit que

$$\|\mathcal{D}\|_2 \le 2\|\Delta\|_2 \left(\sup_{\omega \in \bar{\mathbb{R}}} \frac{1+\omega^2}{4} \|D^{-1}\|_2 \right) \le \|\Delta\|_2.$$

L'ensemble des valeurs propres de $\mathcal{L}$ est donné par $(S-s) \bigcup (-S-s)$, où $\pm S - s = \{\pm t - s\ ;\ t \in S\}$, et où S désigne l'ensemble des valeurs singulières de $Q(\mathrm{i}\omega)/\sqrt{1+\omega^2+\omega^4}$, $\omega \in \bar{\mathbb{R}}$. Ce dernier contient l'intervalle $[d, \beta_0]$. Le théorème de Weyl [7] montre que l'ensemble des valeurs propres de $\mathcal{L} + \mathcal{D}$ contient l'intervalle $(d - s + \eta_1, \beta_0 - s + \eta_2)$, avec $|\eta_1|, |\eta_2| \le \|\Delta\|_2$. Les conditions $s < \beta_0$ et (19) entraînent alors $0 < d - s + \eta$, avec $\eta = \|\Delta\|_2$.

Remarque 1. Les bornes obtenues par ce théorème permettent d'ajuster les estimations fournies pas la méthode de bissection. Cela nécessite une mise en oeuvre analogue à celle préconisée dans [4,5].

Références

[1] Y. Genin, R. Stefan, P. Van Dooren, Real and complex stability radii of polynomial matrices, Linear Algebra Appl. 351–352 (2002) 381–410.
[2] G.H. Golub, C.F. Van Loan, Matrix Computations, 4th edition, The John Hopkins University Press, Baltimore, MD, USA, 2013.
[3] S. Hammarling, C.R. Munro, F. Tisseur, An algorithm for the complete solution of quadratic eigenvalue problems, ACM Trans. Math. Softw. 39 (2013) 18.
[4] D.S. Mackey, N. Mackey, C. Mehl, V. Mehrmann, Numerical methods for palindromic eigenvalue problems: computing the anti-triangular Schur form, Numer. Linear Algebra Appl. 16 (2009) 63–86.
[5] A. Malyshev, M. Sadkane, On the computation of the distance to quadratic matrix polynomials that are singular at some points on the unit circle, Electron. Trans. Numer. Anal. 42 (2014) 165–176.
[6] C.B. Moler, G.W. Stewart, An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems, SIAM J. Numer. Anal. 10 (1973) 241–256.
[7] B.N. Parlett, The Symmetric Eigenvalue Problem, SIAM, Philadelphia, PA, USA, 1998.